

Równania różniczkowe zwyczajne (z laboratorium)

Egzamin 20.06.2024 (I termin), 150 min

Proszę każde zadanie rozwiązywać na osobnej kartce, podpisanej własnym imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.

Na ocenę będzie miało istotny wpływ uzasadnienie wszystkich przedstawianych wyników.

Zadanie 1.

- Sformułuj twierdzenie Peano o lokalnym istnieniu rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego (w ogólnej postaci dla funkcji prawej strony określonej na $\mathbb{R}^{n+1}$).
- Dane jest zagadnienie Cauchego $\dot{x} = |x - 1|$, $x(0) = 1$.
 - Czy z tw. Peana wynika, że rozwiązanie istnieje dla $t \in [0, 1]$?
 - Czy z tw. Peana wynika, że rozwiązanie istnieje w dowolnym przedziale $[0, A]$, gdzie $A > 0$?
 - Czy rozwiązanie zagadnienia jest jednoznaczne?

Zadanie 2. Rozważmy schemat różnicowy dla parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$(2a + 2)y_{n+2} - ay_{n+1} - (2 + a)y_n = h(bf_{n+1} + cf_n).$$

- Wyznacz b i c w zależności od a tak, aby schemat był rzędu co najmniej 2.
- Zbadaj stabilność i silną stabilność schematu w zależności od parametrów.
- Czy istnieją a, b i c takie, że schemat jest zbieżny i rzędu co najmniej 3?

Zadanie 3. Dane jest równanie

$$x^{(4)} - 4\ddot{x} + 4x = \cos(4t).$$

- Znajdź rozwiązanie ogólne równania.
- Czy istnieją rozwiązania ograniczone dla $t \rightarrow +\infty$?
- Czy istnieją rozwiązania okresowe?
- Czy istnieją rozwiązania zbiegające do zera dla $t \rightarrow +\infty$?

W punktach b), c), d) podaj postać odpowiednich rozwiązań, o ile istnieją.

Zadanie 4. Oblicz pochodną $\frac{\partial y}{\partial \mu}|_{\mu=0}$ rozwiązania zagadnienia

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, & x(0) = 1 + \mu, \\ \dot{y} = 2x + \mu y, & y(0) = -2. \end{cases}$$

Zadanie 5. Zbadaj stabilność i asymptotyczną stabilność w sensie Lapunowa zerowego rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - a), \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - a), \end{cases}$$

w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$.